m.t

- مبادئ أولية في نظرية نصف الزمرة :

- مقدمة : إن أول من عرف نصف الزمرة العالم الفرنسي J. A. deseguer وكان ذلك سنة 1904 ولكن نظرية نصف الزمرة بدأت سنة 1928 بفضل العالم الروسي A.K.suschwitch حيث أثبت أن كل نصف زمرة منتهية تحوي نواة ، وفي عام 1970 صدرت أول مجلة علمية متخصصة في أبحاث نصف الزمرة وهي semigraup foram

- تعاريف أولية :

- نصف الزمرة : ليكن $*$ قانون تشكيل على المجموعة غير الخالية S ، إذا كانت $*$ تجميعية على S فإننا نقول أن $(S,*)$ هي نصف زمرة أي إذا حققت $*$ الخاصية :

$$x*(y*z)=(x*y)*z \quad , \forall x,y,z\in S$$

* سوف نكتب اختصاراً xy بدلاً من $x*y$ كما أننا سندعو العملية بالضرب تجاوزاً.
* - إن شرط الخاصية التجميعية في نصف الزمرة S يسمح لنا أن نكتب التركيب : $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ وذلك $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ بدون أقواس.
* سوف نرمز بـ $|S|$ لرئيسي المجموعة S أو مقدرة المجموعة S.
* سوف نرمز لنصف الزمرة الضربية بـ $(S,\cdot)$ أو اختصاراً S فقط.
* إذا كانت نصف الزمرة S تملك الخاصية الإبدالية $xy=yx , \forall x,y\in S$ ندعو عندئذ نصف الزمرة S ~~[illegible]~~ بنصف زمرة تبديلية.
* إذا ملكت نصف الزمرة S عنصراً e يحقق الشرط التالي $xe=ex=x , \forall x\in S$ قلنا أن S ذا عنصر حيادي e وندعوها عندئذ بنصف زمرة واحدية أو (Monoid) (مونوئيد) ، وغالباً نرمز للعنصر الحيادي بالرمز (1).

أما إذا المحقق للعنصر e الشرط التالي فقط $\forall x\in S ; xe=x$ فإننا نقول عنه أنه حيادي يميني وبصورة مشابهة نعرف الحيادي اليساري.

واضح أنه في أي نصف زمرة اذا كان e عنصراً حيادياً ، e' عنصراً حيادياً آخر فإن $(e'=e)$ وذلك لأن : $e=ee'=e'$.

* اذا لم ~~[illegible]~~ تملك نصف الزمرة S على عنصر حيادي فيمكن تزويدها به وذلك بإضافة عنصر جديد (1) إلى S يخضع للشرط التالي :

$$\forall a\in S ; 1a=a1=a$$

مع كون $1.1=1$.

إن $S\cup\{1\}$ تصبح نصف زمرة ذات عنصر حيادي 1 .

* سنرمز بـ S^1 للمجموعة:
$$S^1 = \begin{cases} S & \text{اذا كانت } S \text{ تملك عنصراً محايداً} \\ S \cup \{1\} & \text{اذا كانت } S \text{ لا تملك عنصراً محايداً} \end{cases}$$

* اذا كانت S تحوي أكثر من عنصر وكانت تحوي العنصر k الذي يحقق الشرط:
$$\forall x \in S ; \; xk = kx = k$$
فإننا ندعو k عنصراً ماصاً أو عنصراً صفرياً (أو اختصاراً صفراً) ونرمز له غالباً بـ 0)
كما نقول عن S أنها نصف زمرة ذات صفر، ونعرف الصفر اليميني والصفر اليساري بشكل مشابه للمحايد اليميني والمحايد اليساري.
والمهم انه اذا ملكت نصف الزمرة S عنصراً ماصاً فهو وحيد لأنه لو كان عكس ذلك لكان:
$$k = k \cdot k' = k'$$
إن أهمية الشرط (S تحوي أكثر من عنصر واحد) تأتي من أن نصف الزمرة التافهة $\{a\}$ حيث $a^2 = a$ يكون فيها a حيادي وصفر بنفس الوقت.
* اذا كانت نصف الزمرة S لا تحوي عنصراً ماصاً يمكن الحصول تزويدنا به وذلك بإضافة صفر الى المجموعة S يحقق الشرط:
$$\forall a \in S : \; 0a = a0 = 0$$
ويكون $0 \cdot 0 = 0$
فنحصل على نصف زمرة $S \cup \{0\}$ ذات عنصر ماص أو ذات صفر، وسنرمز بـ S^0 للمجموعة
$$S^0 = \begin{cases} S & \text{اذا كانت } S \text{ تملك عنصراً ماصاً} \\ S \cup \{0\} & \text{اذا كانت } S \text{ لا تملك عنصراً ماصاً} \end{cases}$$

- ملاحظة: إن إضافة أي من العنصرين (الحيادي أو الماص) الى نصف زمرة قد يؤدي الى فقدانه بعض خصائصها الأصلية.
- مثال: لتكن G زمرة ما غير تافهة (وهي من باب أولى نصف زمرة) ولنضف إليها عنصر الصفر فنحصل على نصف زمرة مع الصفر أي G^0 وهي ليست زمرة وذلك لأنه ليس للصفر نظير.
(لأنه لو كان خلاف ذلك لكان x نظيره)
$$0 \cdot x = x \cdot 0 = e$$
$$0 = e \Rightarrow \text{ وهذا تناقض}$$

* نعرف نصف الزمرة الصفرية بأنها نصف الزمرة S التي تحقق الشرط $(xy = 0 \; ; \; \forall x, y \in S)$.
- كما نعرف نصف الزمرة الصفرية اليسارية S التي تحقق: $(xy = x \; ; \; \forall x, y \in S)$
- ملاحظة: إن نصف الزمرة S التي تحقق الشرط:
$$aS = Sa = S \; ; \; \forall a \in S$$
تكون زمرة

Generated by CamScanner from intsig.com

- البرهان: ① الخاصة التجميعية محققة على S لأنها نصف زمرة.

② $\forall a\in S;\ aS=S \Rightarrow \forall a\in S;\ \exists x\in S;\ ax=a$

x عنصر محايد يميني في S.

$\forall a\in S;\ Sa=S \Rightarrow \forall a\in S;\ \exists y\in S;\ ya=a$

y عنصر محايد يساري في S.

$x=yx=y$

أي أنه S تملك محايد وحيد نرمز له بـ e.

③ $e\in S,\ \forall a\in S,\ aS=S \Rightarrow \exists a'\in S;\ aa'=e$

$e\in S,\ \forall a\in S,\ Sa=S \Rightarrow \exists a''\in S;\ a''a=e$ $\Rightarrow$

$a''=a''e=a''aa'=ea'=a'$

أي أن: $aa'=a'a=e;\ \forall a\in S$ أي أنه لكل عنصر نظير في S

ومنه نستنتج أن S زمرة.

- مثال: ليكن n عدداً طبيعياً، $S=\{0,1,2,\dots,n-1\}$

نعرف العملية * على S بالشكل التالي:

$\forall a_1,a_2\in S$؛ $a_1*a_2=$ باقي قسمة $a_1.a_2$ على n

أي أن: $a_1*a_2=a_1.a_2 \pmod n$

عندئذ $(S,*)$ تكون نصف زمرة تبديلية.

$S=\{0,1,2,3,4\}$ $n=5$

$(1*2)*3=2*3=1$

$1*(2*3)=1*1=1$

والخاصة التجميعية محققة.

m.t

Generated by CamScanner from intsig.com

مبرهنة:

إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر فإن S هي زمرة مع الصفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$(\forall a \in S-\{0\} : aS = Sa = S)$$

البرهان:

لنفرض أن S هي زمرة مع الصفر ولنفرض أن $S-\{0\} = G$ فإن G زمرة حيث تحقق الشرط:

$$\forall a \in G,\ aG = Ga = G \Rightarrow \forall a \in G$$

$$, aG \cup \{0\} = Ga \cup \{0\} = G \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \forall a \in G ;\ aG \cup \{a0\} = Ga \cup \{0a\} = G \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \forall a \in G ;\ a(G \cup \{0\}) = (G \cup \{0\})a = G \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow a \in S-\{0\} ;\ aS = Sa = S$$

لنفرض أن الشرط محقق: $(\forall a \in S-\{0\} ;\ aS = Sa = S)$

لنفرض أن $G = S-\{0\}$ مجموعة جزئية من S، إن $G \neq \phi$ وذلك لأن $|S|>1$ (لأنه لو كان خلاف ذلك فإن $\forall a \in S-\{0\}$ يفقد معناه).

لتكن $a, b \in G$ فإن: $ab \in G$ (لأنه لو كان خلاف ذلك لكان $ab = 0$)

وبالتالي: $S^2 = S.S = (Sa)(bS) = Sab S = S0S = \{0\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = aS \subseteq S^2 = \{0\} \Rightarrow S = \{0\} \Rightarrow |S| = 1$$

وهذا مخالف لكون $|S|>1$.

وبالتالي فإن G مغلقة بالنسبة للضرب أي أنه مهما يكن $a \in G$ فإن: $aG \subseteq G$ & $Ga \subseteq G$.

مجزأة تامة

لنبرهن الآن أن: $aG = G$، إذا لم يكن كذلك فإن $aG \subset G$، وبالتالي فإن:

$$aS = a(G \cup \{0\}) = aG \cup \{0\} \subset G \cup \{0\} = S$$

فهذا يعني أن: $aS \subset S \Leftarrow aS \neq S$ حيث $a \in G$، وهذا مخالف للفرض

ومنه ينتج أن: $aG = G$.

وبنفس الطريقة تماماً نبرهن أن: $Ga = G \Leftarrow aG = Ga = G ; \forall a \in G$

حسب مبرهنة سابقة ينتج أن G زمرة $\Leftarrow S = G^0$ زمرة مع الصفر.

- نصف الزمرة الجزئية:

تعريف: إذا كانت $(S, *)$ نصف زمرة ما فإن المجموعة الجزئية غير الخالية

Alfares

Generated by CamScanner from intsig.com

التاريخ ٢٠١ الموضوع

* T من S تدعى نصف زمرة جزئية من S اذا كانت مغلقة بالنسبة للعملية أي اذا تحققت الشروط:

$$\forall x, y \in T ; x * y \in T$$

يمكن التعبير عن هذا الشرط باستخدام مفهوم جداء مجموعتين ، فنقول أن T نصف زمرة جزئية من S اذا كان $T^2 \subseteq T$ (ليس جداء ديكارتي هو جداء العنصر الأول من T والثاني من T)

نلاحظ أن S نفسها هي نصف زمرة جزئية من S كما أن $\{e\}$, $\{0\}$ هما نصف زمرة جزئية من S ، إذا احتوت S على عنصر حيادي وعنصر ماص.

تعريف:

إن العنصر a من S (نصف زمرة) يدعى عنصراً جامداً (أو طاحلاً) اذا كان: $a^2 = a$

كما أن نصف الزمرة التي تكون جميع عناصرها جامدة تدعى نصف زمرة جامدة أو عصبية.

إن كلاً من العنصر الحيادي والعنصر الماص هو عنصر جامد ، ولكن العكس ليس صحيحاً.

ملاحظة:

اذا كانت (T) مجموعة غير خالية من نصف زمرة S فإن T تكون زمرة جزئية من S اذا وفقط اذا تحقق الشرط: $\forall a \in T \; ; \; aT = Ta = T$

البرهان: لنفرض أن T زمرة جزئية من S $\Leftarrow$ $\{ \forall a \in T ; aT \subseteq T$

$\{ \forall x \in T \Rightarrow x = ex \Rightarrow a a^{-1} x \in aT \Rightarrow T \subseteq aT$

$\Leftarrow$ $aT = T ; \forall a \in T$ بنفس الطريقة تماماً نبرهن أن: $Ta = T ; \forall a \in T$

ومنه ينتج المطلوب.

لنفرض أن الشرط محقق ولنبرهن أن T زمرة جزئية من S

من الشرط $aT = T$ وذلك $\forall a \in T$ يعني أن T مغلقة بالنسبة الى الضرب أي أن T نصف زمرة جزئية من S.

أي أن T نصف زمرة جزئية من S وتحقق الشرط $aT = Ta = T ; \forall a \in T$

وحسب ملاحظة سابقة تكون T زمرة جزئية من S.

قابلية القسمة:

اذا كانت S نصف زمرة وليست زمرة فهذا يعني أن هناك على الأقل عنصرين $a, b \in S$ بحيث أنه لا يوجد من أجلهما $x, y \in S$ بحيث تتحقق العلاقتان:

$$by = a \quad , \quad xb = a$$

Generated by CamScanner from intsig.com

من الممكن أن تتحقق من أجل عنصرين a, b إحدى العلاقتين السابقتين أي أنه قد نجد x أو y تحقق إحدى المعادلتين.

تعريف:

يسمى العنصر b من نصف الزمرة S قاسماً يمينياً للعنصر a من S إذا وجد عنصر $x \in S$ بحيث يكون $xb = a$ ، كما نسمي b قاسماً يسارياً للعنصر a من S إذا وجد عنصر $y \in S$ بحيث يكون $by = a$.

ونقول في الحالة الأولى أن a يقبل القسمة على b من اليمين، وفي الحالة الثانية نقول أن a يقبل القسمة على b من اليسار.

مبرهنة:

لتكن S نصف زمرة، B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عناصر S عندئذ:

(1) B غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونوئيد (نصف زمرة واحدية).

(2) B زمرة جزئية من S إذا كانت غير خالية.

البرهان:

إن المجموعة $B = \{b \in S ; bS = Sb = S\}$ ← مجموعة القواسم اليمينية واليسارية

(1) لزوم الشرط: $B \neq \emptyset$ فيوجد عنصر $b \in B$ وهو ينتمي إلى S وبالتالي $\forall a \in S$

فإنه يوجد $x, y \in S$ بحيث يكون: $yb = a$ ، $bx = a$

ولكن $b \in S$ وبالتالي يوجد $e, e' \in S$ بحيث يكون $e'b = b$ ، $be = b$

ومنه نجد أن e حيادي يميني $\Leftarrow ae = ybe = y\,be = yb = a$

e' حيادي يساري $\Leftarrow e'a = e'bx = e'b\,x = bx = a$ $\Rightarrow$

$e = e'$ حيادي في S ، وبالتالي فإن S تكون مونوئيد.

كفاية الشرط: لنفرض أن S مونوئيد فهي تملك عنصر حيادي e وهو يحقق الشرط.

$eS = Se = S \Rightarrow e \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$ غير خالية.

(2) إذا كانت $B \neq \emptyset$ وليكن $b_1, b_2 \in B$ فإن:

$$\left.\begin{aligned} b_1b_2S &= b_1(b_2S) = b_1S = S \\ Sb_1b_2 &= (Sb_1)b_2 = Sb_2 = S \end{aligned}\right\} \Rightarrow (b_1b_2)S = S(b_1b_2) = S \Rightarrow$$

$b_1b_2 \in B \Rightarrow$ B مغلقة بالنسبة للضرب

$\Leftarrow$ B نصف زمرة جزئية من S.

Generated by CamScanner from intsig.com

- $B \neq \emptyset$ حسب ① يوجد عنصر محايد e من S ولكن $s = es = se$ أي أن $e \in B$
- بما أن $e \in S$ وبما أن $b \in B$ فإنه يوجد $b', b'' \in S$ بحيث يكون:

$b''b = e$, $bb' = e$.

$$b' = eb' = b''bb' = b''bb' = b''e = b''$$

وبالتالي يكون $\forall b \in B$ فإنه يوجد $b' = b''$ بحيث يكون $bb' = b'b = e$

لنبين أن $b' \in B$ وبما أن $e \in S$ فإن $bb' = e$, $b'b = e$

فإن b' هو معاكس يميني ويساري للعنصر e وبالتالي فإنه $b' \in B$.

$$\left.\begin{array}{l} s = es = b'bs = b's \\ s = se = sbb' = sb' \end{array}\right\} \Rightarrow b's = sb' = s \Rightarrow b' \in B$$

ومنه ينتج أن B زمرة جزئية من S.

m.t

Generated by CamScanner from intsig.com

- مبرهنة : في نصف زمرة S ، مجموعة كل العناصر التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S ، هي إما خالية أو زمرة جزئية من S .

- البرهان :

لتكن C مجموعة العناصر التي تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على كل عنصر من عناصر S .

اذا لم تكن C خالية فلنفرض أن : $c_1, c_2 \in C$ ، فمهما يكن $a \in S$ يوجد $x \in S$ بحيث أي : $c_1 = ax$

$$c_1 c_2 = (ax) c_2 = a(x c_2)$$

أي أن $c_1 c_2$ تقبل القسمة على أي عنصر من S من اليسار .

ومهما يكن $a \in S$ يوجد $y \in S$ بحيث يكون : $c_2 = ya$ أي :

$$c_1 c_2 = c_1 (ya) = (c_1 y) a$$

أي أن $c_1 c_2$ تقبل القسمة على أي عنصر من S من اليمين .

ومنه $c_1 c_2$ تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على أي عنصر من S وبالتالي $c_1 c_2 \in C$

أي أن C نصف زمرة جزئية من S .

- لنبرهن الآن أن : $\forall a \in C ;\ ae = ea = e$ أي أن C زمرة جزئية من S .

بما أن $c_1, c_2 \in C$ فإن : $c_2^2, c_2 \in S$ فإنه يوجد u, v, w من S

بحيث يكون : $u c_2^2 = c_2$, $c_2^2 v = c_2$, $c_2 w = c_1$

ومنه : $u c_2 = u(c_2^2 v) = (u c_2^2) v = c_2 v$

$$c_2 (c_2 v^2 c_1) = (c_2^2 v)(v c_1) = c_2 v c_1 = (u c_2) c_1 = (u c_2)(c_2 w)$$
$$= (u c_2^2) w = c_2 w = c_1$$

أي أن : $y = c_2 v^2 c_1$ هو حل للمعادلة $c_2 y = c_1$ (أي أن : $c_2 C = C$; $\forall c_2 \in C$)

لنبرهن الآن أن : $y \in C$ ، لدينا $\forall a \in S$ يوجد $d_1, d_2 \in S$ بحيث يكون :

$$c_1 = d_1 a \ ,\ c_2 = a d_2$$

$$y = c_2 v^2 c_1 = a d_2 v^2 d_1 a = a(d_2 v^2 d_1 a) = (a d_2 v^2 d_1) a$$

ومنه نستنتج أن y يقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على أي عنصر من S وبالتالي يكون $y \in C$.

- وبطريقة مشابهة ، إذا كان $c_1, c_2 \in C$ فإن $c_2^2, c_2 \in C$ وبالتالي فإنه يوجد $u, v, w \in S$ بحيث يكون :

Generated by CamScanner from intsig.com

$$e_2^2 u = e_2 \quad , \quad v e_2^2 = e_2 \quad , \quad w e_2 = e_1$$

$$v e_2 = v(e_2^2 u) = (v e_2^2) u = e_2 u$$

$$(e_1 v^2 e_2) e_2 = (e_1 v)(v e_2^2) = e_1 (v e_2) = e_1 e_2 u$$
$$= (w e_2)(e_2 u) = w(e_2^2 u) = w e_2 = e_1$$

أي أن: $x = e_1 v^2 e_2$ هو حل للمعادلة $x e_2 = e_1$ $C e_2 = C$

لنثبت أن $x \in C$ ، لدينا $\forall a \in S$ يوجد $z_1, z_2 \in S$ بحيث يكون:

$e_1 = a z_1$ ، $e_2 = z_2 a$ ومنه:

$$x = e_1 v^2 e_2 = a z_1 v^2 z_2 a = a(z_1 v^2 z_2 a) = (a z_1 v^2 z_2) a$$

أي أن x تقبل القسمة من اليمين ومن اليسار على أي عنصر من S وبالتالي فإن $x \in C$

ومن الحالتين ينتج أن: $(\forall a \in C \; ; \; ac = ca = c)$ أي أن C زمرة جزئية من S.

مبرهنة:

إذا كان نصف الزمرة S غير خالٍ و تقسم كل من عناصرها يمينياً ويساراً وتقبل القسمة يمينياً ويساراً على كل عنصر من عناصرها فإن S زمرة.

البرهان: مهما يكن a و b من S فإنه يوجد x_1 و x_2 و y_1 و y_2 من S بحيث يكون:

نفرض $\left(a = x_1 g \quad , a = g y_1 \quad , \quad g = x_2 b \quad , g = b y_2 \right)$

$$a = x_1 g = x_1 x_2 b = (x_1 x_2) b \qquad , \quad a = g y_1 = b y_2 y_1 = b(y_2 y_1)$$

أي أن: $x = x_1 x_2$ هو حل للمعادلة $a = xb \Leftarrow S = Sb$

$y = y_2 y_1$ هو حل للمعادلة $a = by \Leftarrow S = bS$ $\Leftarrow$

$$\forall b \in S \; ; \; Sb = bS = S$$

ومنه ينتج أن S زمرة.

مثال: لتكن G_1 ، G_2 زمرتين بحيث أن: $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ولتكن: $S = G_1 \cup G_2$

ولنعرف قانون تشكيل داخلي على S كما يلي: لتكن $a, b \in S$ فإذا انتمت:

كل من a, b إلى زمرة واحدة (من G_1 أو من G_2) فإن ناتج $a.b$ هو نفسه في زمرتيهما أما

إذا كانت $a \in G_1$ ، $b \in G_2$ فإن: $ab = ba = b$

أثبت أن S نصف زمرة وأوجد مجموعة العناصر التي تقبل القسمة على أي عنصر من S.

الحل: $\forall a, b, c \in S$ لنميز الحالات التالية:

① $a,b,c \in G_1$ أو $a,b,c \in G_2$ عندئذٍ الخاصة التجميعية محققة لأن كلاً من G_1, G_2 زمرة.

② $a,b \in G_1$, $c \in G_2$:

$\underbrace{(ab)}_{G_1}\underbrace{c}_{G_2} = \underbrace{c}_{\in G_2}$ حسب التعريف , $a(bc) = ac = c$

عندئذٍ الخاصة التجميعية محققة.

③ $a,b \in G_2$, $c \in G_1$:

$\underbrace{(ab)}_{G_2}c = ab$, $a(bc) = ab$

④ $a,c \in G_1$, $b \in G_2$:

$(ab)c = bc = b$, $a(bc) = ab = b$

⑤ $a,c \in G_2$, $b \in G_1$:

$(ab)c = ac$, $a(bc) = ac$

⑥ $b,c \in G_1$, $a \in G_2$:

$(ab)c = ac = a$, $a\underbrace{(bc)}_{G_1} = a$

الخاصة التجميعية محققة.

⑦ $b,c \in G_2$, $a \in G_1$:

$(ab)c = bc$, $a\underbrace{(bc)}_{G_2} = bc$

من جميع الحالات الممكنة تكون الخاصة التجميعية محققة، وبالتالي فإن S هي نصف زمرة.

- لنأخذ $a \in G_1$ فإن:

$$aS = a(G_1 \cup G_2) = aG_1 \cup aG_2 = G_1 \cup G_2 = S$$
$$Sa = (G_1 \cup G_2)a = G_1 a \cup G_2 a = G_1 \cup G_2 = S$$

$\forall x \in aG_2 \Rightarrow \exists y \in G_2 ; x = ay = y \in G_2$

$$\forall a \in G_1 ; aS = Sa = S \Rightarrow B = G_1$$

S زمرة تامة.

- لنأخذ $b \in G_2$ وليكن $d \in S$ فإنه يوجد $x, y \in S$ بحيث يكون:

$xd = b$ $\quad$ $dy = b$

• إذا كانت $d \in G_2$ فإن للمعادلتين السابقتين حل في G_2 وذلك لأن:

Alfares

Generated by CamScanner from intsig.com

(زمرة $G_2 \Leftrightarrow \forall a \in G_2 \; ; \; aG_2 = G_2 a = G_2$)

أما إذا كانت $a \in G_1$ فيوجد الحل $x = y = b$

فكلتا المعادلتين يوجد لهما حل وبالتالي تكون جميع عناصر G_2 تقبل القسمة على أي عنصر من G من اليمين ومن اليسار أي أنه $G_2 = G$.

التاريخ ۲۰۱ الموضوع: "المحاضرة الرابعة"

تعريف: لتكن $(S,*)$ و $(S',\cdot)$ نصفي زمرتين ولتكن $\varphi: S \to S'$ تطبيقاً من S في S'، فإننا ندعو φ هومومورفيزماً، إذا تحقق الشرط:

$$\forall x,y \in S \;:\; \varphi(x*y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

وغالباً ما نكتب اختصاراً الشرط:

$$\forall x,y \in S \;:\; \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

إذا كان φ متباينياً ندعوه مونومورفيزم.

وإذا كان φ تقابلاً ندعوه إيزومورفيزماً.

إذا كان $S=S'$ فإن الهومومورفيزم يدعى إندومورفيزم.

إذا كان φ تقابلاً و $S=S'$ ندعوه اوتومورفيزماً.

نقول عن S و S' هومومورفيتان إذا وجد هومومورفيزم بينهما.

نقول عن S و S' إيزومورفيتان إذا وجد إيزومورفيزم بينهما.

تمرين: أثبت أنه إذا كانت S نصف زمرة و φ هومومورفيزم من S إلى نصف الزمرة S' فإن $\varphi(S)$ هي نصف زمرة جزئية من S.

الحل: ليكن $a,b \in \varphi(S) \Leftarrow$ يوجد $x,y \in S$ بحيث يكون:

$$a=\varphi(x) \quad , \quad b=\varphi(y)$$

$$ab=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(\underbrace{xy}_{\in S}) \in \varphi(S)$$

أي أن $\varphi(S)$ مغلقة وبالتالي هي نصف زمرة جزئية من S.

مثال: لتكن M مجموعة غير خالية ولتكن S مجموعة جزئية من $P(M)$ حيث ($P(M)$ هي مجموعة أجزاء M).

$$\forall A,B \in S \;,\; A\cap B \in S$$

عندئذ:

إن $(S,\cap)$ نصف زمرة تبديلية (لأن عملية التقاطع تجميعية وتبديلية) وكل عنصر من عناصرها جامد لأن $A^2=A\cap A=A$ فهي عصبة.

ملاحظة:

إن أي عصبة تبديلية E ايزومورفية مع نصف زمرة S حيث $S \subseteq P(E)$ مزودة بعملية التقاطع.

البرهان: لتكن $A_e \subseteq E$ (مجموعة كل العناصر من E التي تقبل القسمة يميناً ويساراً على العنصر $e \in E$) أي أن $A_e=eE\cap Ee=eE$ لأن E عصبة تبديلية

(لأن أي من عناصرها جامد وأنها عصبة تبديلية)

وإذا كان $f\in E$ فإن: $A_{ef}\subseteq A_e\cap A_f$

(وذلك لأنه إذا كان $x\in A_{ef} \Leftarrow x\in efE \Leftarrow$ يوجد عنصر $a\in E$ بحيث

يكون $x=efa \Leftarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x=f(\underbrace{ea}_{\in E})\in fE \underset{\text{حسب التعريف}}{=} A_f \\ x=e(fa)\in eE=A_e \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Leftarrow x\in A_e\cap A_f$ وبالتالي: $(A_{ef}\subseteq A_e\cap A_f)$

كما أن: $A_e\cap A_f\subseteq A_{ef}$ وذلك لأن:

$$x\in A_e\cap A_f \Rightarrow x\in A_e=eE \;\&\; x\in A_f=fE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists a,b\in E;\ x=ea,\ x=fb$$

$$x=x^2=xx=eafb=(ab)(ef)=(ef)(\underbrace{ab}_{\in E})\in efE=A_{ef}$$

ومنه: $A_e\cap A_f\subseteq A_{ef}$ وبالتالي تنتج المساواة: $A_e\cap A_f=A_{ef}$

لتكن: $S=\{A_e\subseteq E;\ e\in E\}$ فتكون $(S,\cap)$ نصف زمرة تبديلية،
جميع عناصرها جامدة، لنعرف التطبيق: $\varphi: E\longrightarrow S$

$$e\longrightarrow A_e$$

إن φ هومومورفيزماً لأنه $\forall e,f\in E$ فإن:

$$\varphi(ef)=A_{ef}=A_e\cap A_f=\varphi(e)\cap\varphi(f)$$

كذلك فإن φ تقابل لأنه إذا كان: $e,f\in E$ بحيث:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(e)=\varphi(f) \Rightarrow A_e=A_f \\ f=f^2\in fE=A_f \qquad ,\ e=e^2\in eE=A_e \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$e\in A_e=A_f=fE \Rightarrow \exists x\in E;\ e=fx$$

$$f\in A_f=A_e=eE \Rightarrow \exists y\in E;\ f=ey$$

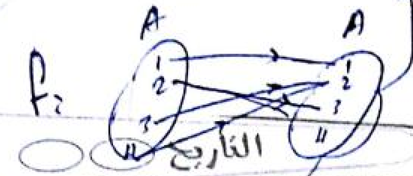
$$e=fx=eyx=fxyx=fx^2y=fxy=ey=f$$

ومنه نستنتج أن φ متباين.

ومهما تكن $A\in S \Leftarrow$ يوجد $e\in E$ بحيث يكون $A=A_e \Leftarrow$ يوجد $e\in E$
بحيث يكون $\varphi(e)=A_e=A$ ومنه نستنتج أن φ غامر

وبالتالي فإن φ تقابل أي أن: $E\cong S$

Generated by CamScanner from intsig.com



* نصف زمرة التحويلات التامة :

تعريف : نسمي التطبيق $f: A \longrightarrow A$ تحويلاً للمجموعة A ونرمز لمجموعة كل التحويلات للمجموعة A بالرمز: $F(A)$.

إن المجموعة $F(A)$ مع عملية تركيب التطبيقات (أو جداء التطبيقات تجاوزاً) هي نصف زمرة ندعوها ((نصف زمرة التحويلات التامة)) للمجموعة A.

إن مجموعة التباديل للمجموعة A نرمز لها بـ $D(A)$ (أو مجموعة التقابلات من A على A) تشكل زمرة جزئية من $F(A)$

تعريف :

نسمي التشاكل ψ من نصف زمرة S إلى نصف زمرة التحويلات $F(A)$ لمجموعة A ((تمثيلاً)) لنصف الزمرة S بدوال (أو تحويلات) وإذا كان ψ إضافة لما سبق متبايناً ندعوه ((تمثيلاً أميناً)).

تعريف :

إذا كانت S نصف زمرة فإن التحويل :
$$\rho_a : S \longrightarrow S$$
$$x \longrightarrow xa \; ; \; a \in S$$
يدعى ((الانسحاب اليميني الداخلي)) لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S.

كما أن التحويل :
$$\lambda_a : S \longrightarrow S$$
$$x \longrightarrow ax \; ; \; a \in S.$$
يدعى ((الانسحاب اليساري الداخلي)) لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S.

تمرين : أثبت أن كلاً من : $\{\lambda_a ; a \in S\}$, $\{\rho_a ; a \in S\}$ نصف زمرة جزئية من $F(S)$

الحل : نبرهن أن : $\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$, $\rho_a \rho_b = \rho_{ab}$

$$\forall x \in S ; \quad (\lambda_a \lambda_b)(x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = \lambda_a(bx) = a(bx) = abx$$
$$\lambda_{ab}(x) = (ab)x = abx$$
$$\Rightarrow (\lambda_a \lambda_b)(x) = \lambda_{ab}(x)$$
$$\Rightarrow \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab} \in \{\lambda_a ; a \in S\} \Rightarrow$$ $\{\lambda_a ; a \in S\}$ نصف زمرة جزئية من $F(S)$

$$\forall x \in S , \quad (\rho_a \rho_b)(x) = \rho_a(\rho_b(x)) = \rho_a(xb) = (xb)a = xba$$
$$\rho_{ba}(x) = x(ba) = xba$$
$$\Rightarrow$$

$(\rho_a\rho_b)(x) = \rho_{ab}(x) \quad ; \forall x\in S$

$\Rightarrow \rho_a\rho_b = \rho_{ba} \in \{\rho_a ; a\in S\} \Rightarrow$ $\{\rho_a ; a\in S\}$ نصف زمرة جزئية من $\mathcal{F}(S)$

تعريف:

~~يسمى~~ ، التطبيق: $\varphi: S \to \mathcal{F}(S)$ "الذي يدعى التمثيل النظامي"

$a \to \lambda_a$

لنصف الزمرة S ، بينما التطبيق: $\psi: S \to \mathcal{F}(S)$ يدعى التمثيل النظامي المعاكس

لنصف الزمرة S $\quad a \to \rho_a$

إذا كان φ تمثيلاً نظامياً لنصف الزمرة S^1 فإننا ندعو "ممدد التمثيل النظامي" لنصف الزمرة S وبطريقة مماثلة نعرف ممدد التمثيل النظامي المعاكس.

تمرين: أثبت أن كلاً من ممدد التمثيل النظامي وممدد التمثيل النظامي المعاكس هو تمثيل أحادي دوماً.

الحل: ليكن: $\varphi: S^1 \to \mathcal{F}(S^1)$ ونفرض أن $a,b\in S$

$a \to \lambda_a$

بحيث أن: $\varphi(a)=\varphi(b)$

$\varphi(a)=\varphi(b) \Rightarrow \lambda_a=\lambda_b \Rightarrow \forall x\in S^1 , \lambda_a(x)=\lambda_b(x) \Rightarrow ax=bx$

ولكن $1\in S^1$ ومنه: $a1=b1 \Rightarrow a=b$ ومنه نستنتج أن φ متباين

وبالتالي فالتمثيل النظامي أحادي.

وبنفس الطريقة نبرهن أن التمثيل النظامي المعاكس أحادي.

$\psi: S^1 \to \mathcal{F}(S^1) ; a\to\rho_a$

ليكن $a,b\in S^1$ بحيث أن: $\psi(a)=\psi(b)$

$\psi(a)=\psi(b)\Rightarrow \rho_a=\rho_b \Rightarrow \forall x\in S^1 ; \rho_a(x)=\rho_b(x)\Rightarrow$

$\forall x\in S^1 , xa=xb$

وعلماً أن $1\in S^1$ فإن: $1a=1b \Rightarrow a=b$ ومنه ψ متباين أي أن التمثيل النظامي المعاكس هو تمثيل أحادي.

تعريف: نقول عن تحويل (ρ) لنصف زمرة S أنه "انسحاب يميني" لـ S

إذا كان: $x\rho(y)=\rho(xy) ; \forall x,y\in S$

ونقول عن تحويل (λ) لنصف زمرة S أنه "انسحاب يساري" لـ S

إذا كان: $\lambda(x)y=\lambda(xy) ; \forall x,y\in S$

Alfares

Generated by CamScanner from intsig.com

- نقول عن الإنسحابين اليميني ρ واليساري λ لنصف زمرة S أنهما مترابطان إذا كان:

$$x\lambda(y) = \rho(x)y \qquad \forall x, y \in S$$

- تمرين: برهن أن الإنسحابين الداخليين ρ_a, λ_a مترابطان؟

الحل:

$$\left.\begin{aligned} x\lambda_a(y) &= x(ay) = xay \\ \rho_a(x)y &= (xa)y = xay \end{aligned}\right\} \Rightarrow x\lambda_a(y) = \rho_a(x)y$$

وبالتالي فإن λ_a و ρ_a مترابطان.

- مبرهنة:

ليكن λ و ρ انسحابين يساري ويميني لنصف زمرة S، وليكن $a \in S$ عندئذٍ:

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)} \qquad . \qquad \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

وإذا كان λ و ρ مترابطين فإن:

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)} \qquad \rho_a\rho = \rho_{\lambda(a)}$$

- البرهان:

$$\forall x \in S, \ (\lambda\lambda_a)(x) = \lambda(\lambda_a(x)) = \lambda(ax) = \lambda(a)x = \lambda_{\lambda(a)}(x)$$

$$\Rightarrow \lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$$

$$\forall x \in S, \ (\rho\rho_a)(x) = \rho(\rho_a(x)) \overset{\text{انسحاب يميني}}{=} \rho(xa) = x\rho(a) = \rho_{\rho(a)}(x)$$

$$\Rightarrow \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

$$\forall x \in S; \ (\lambda_a\lambda)(x) = \lambda_a(\lambda(x)) \overset{\text{داخلي}}{=} a\lambda(x) \overset{\text{ترابطهما}}{=} \rho(a)\cancel{x} = \lambda_{\rho(a)}(x)$$

$$\Rightarrow \lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)}$$

$$\forall x \in S; \ (\rho_a\rho)(x) = \rho_a(\rho(x)) = \rho(x)a = x\lambda(a) = \rho_{\lambda(a)}(x)$$

$$\Rightarrow \rho_a\rho = \rho_{\lambda(a)}$$

- تمرين: أثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك محايداً يمينياً فإن كل انسحاب يميني لـ S هو داخلي.

الحل: ليكن ρ انسحاباً يمينياً لـ S، و 1 محايداً يمينياً لـ S، عندئذٍ من أجل $x \in S$ فإن:

$1, x \in S$ فإن: $x\rho(1) = \rho(x.1) = \rho(x) \Rightarrow$

$$\rho_{\rho(1)}(x) = \rho(x)$$

$$\Rightarrow \rho_{\rho(1)} = \rho$$

أي أن الانسحاب اليميني هو انسحاب يميني داخلي.

Alfares
Generated by CamScanner from intsig.com

تمرين: لتكن A مجموعة غير خالية و $\mathcal{F}(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة A.
أثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in \mathcal{F}(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ هو أن يكون $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$.

الحل: لنفرض أن ψ قاسم يساري للعنصر φ $\Leftarrow$ يوجد تحويل مثل $g \in \mathcal{F}(A)$ بحيث يكون $\varphi = \psi g$ وبالتالي فإن:

$$\varphi(A) = (\psi g)(A) = \psi g(A) \subseteq \psi(A)$$

نفرض أن $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$ $\Leftarrow$ $\forall x \in A$ فإن $\varphi(x) \in \psi(A)$ $\Leftarrow$
$\forall x \in A$ يوجد $u \in A$ بحيث يكون $\varphi(x) = \psi(u)$
نعرف التحويل $h : A \longrightarrow A$ بحيث أن $h(x) = u$ ، $\forall x \in A$ يكون عندئذٍ

$$(\psi h)(x) = \psi(h(x)) = \psi(u) = \varphi(x) \Rightarrow \psi h = \varphi \Rightarrow$$

ψ قاسم يساري للتحويل φ.

m.t

Alfares

Generated by CamScanner from intsig.com